Sur la répartition divisorielle normale de $\vartheta d \pmod 1$.

Sébastien Kerner, Gérald Tenenbaum

Math. Proc. Camb. Phil. Soc.
137 (2004), 255–272.

Sur la répartition divisorielle normale de $\vartheta d \,(\mathrm{mod}\, 1)$

S. Kerner & G. Tenenbaum

1. Introduction

Soit f une fonction arithmétique. Posons

$$m(n;f) := \min_{d|n} \|f(d)\| \qquad (n \geqslant 1),$$

où $\|u\|$ désigne la distance du nombre réel u à l'ensemble des entiers. Le comportement normal de $m(n;f)$ est une mesure de la nature probabiliste de l'ensemble des diviseurs d'un entier «statistique». Une hypothèse standard d'équirépartition conduit à l'évaluation

$$m(n;f) = 1/\tau(n)^{1+o(1)} \quad \text{pp}, \tag{1·1}$$

où $\tau(n)$ désigne le nombre total des diviseurs d'un entier naturel n, et où, ici et dans la suite, nous utilisons la mention pp (presque partout) pour indiquer qu'une propriété relative à un entier générique est valable sur une suite de densité naturelle unité.

Il existe essentiellement deux techniques générales pour estimer $m(n;f)$ pp.

La première repose sur la notion d'équirépartition sur les diviseurs, qui a été formellement introduite par Hall dans [7]. Désignant par $\langle z\rangle$ la partie fractionnaire d'un nombre réel z, on dit qu'une fonction arithmétique f est équirépartie sur les diviseurs (en abrégé : erd) si la discrépance

$$\Delta(n;f) := \sup_{0\leqslant u\leqslant v\leqslant 1} \Bigg| \sum_{\substack{d|n\\ u<\langle f(d)\rangle\leqslant v}} 1 - (v-u)\tau(n) \Bigg|$$

est $o\big(\tau(n)\big)$ lorsque n parcourt une suite convenable de densité naturelle unité. La majoration

$$m(n;f) \leqslant \Delta(n;f)/\tau(n) \tag{1·2}$$

fournit donc, pour toute fonction erd, un renseignement non trivial pp.

Cette approche, qui possède l'inconvénient d'injecter la question initiale dans un problème plus difficile, permet en contrepartie d'exploiter les inégalités générales pour la discrépance, comme celle d'Erdős–Turán, et, notamment, de tirer parti du lien avec les sommes d'exponentielles. Des majorations de $\Delta(n;f)$ pour de nombreuses fonctions naturelles f ont été obtenues par cette voie dans l'article de synthèse [16]. Elles y sont énoncées, en raison du point de vue systématique adopté dans ce travail, pour des suites de densité *logarithmique* unité. Cependant, les méthodes de sommes d'exponentielles employées dans [16] permettent, au prix de quelques complications purement techniques, d'établir que les mêmes estimations sont en fait valables pp. Tenant cette extension pour acquise, nous pouvons ainsi énoncer que, pour tout α positif non entier, on a ([16], théorème 11)

$$\min_{d|n,\, d>1} \|d^\alpha\| \leqslant 1/\tau(n)^\delta \quad \text{pp} \tag{1·3}$$

dès que $\delta < \log(\frac{12}{11})/\log 4$, et aussi ([16], corollaire 9)

$$\min_{d|n} \|\vartheta d\| \leqslant 1/\tau(n)^c \quad \text{pp} \tag{1·4}$$

pour tout $c < 1 - (\log 3)/\log 4$ lorsque ϑ est, par exemple, irrationnel algébrique.

La seconde approche consiste à adapter les techniques spécifiques développées dans la littérature pour construire des suites de Behrend. Implicitement considéré par Erdős dans de nombreux travaux, le concept de suite de Behrend a été formellement introduit par Hall dans [8] : on dit qu'une suite d'entiers $\mathcal{A}$ est une suite de Behrend si l'ensemble de ses multiples

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) := \{ma : m \geqslant 1,\ a \in \mathcal{A}\}$$

est de densité naturelle unité. Voir notamment [10], [15] et [16] pour des exposés de synthèse sur cette notion. Le corollaire 1 de [15],[1] par exemple, fournit immédiatement que la suite

$$\mathcal{A}(\alpha,\beta) := \bigcup_{k\geqslant 1}\{d \in \mathbb{N} : k \leqslant (\log d)^\alpha < k + 1/k^\beta\}$$

est de Behrend si $\beta < \beta_0(\alpha) := \log 2/\max\{\alpha, 1-\log 2\}$ et ne l'est pas si $\beta > \beta_0(\alpha)$. La méthode peut être adaptée sans difficulté pour montrer que, si $\beta < \alpha\beta_0(\alpha)$, alors tous les entiers $n \leqslant x$ sauf au plus $o(x)$ possèdent un diviseur dans

$$\bigcup_{1\leqslant k\leqslant(\log x)^\alpha} \{d \in \mathbb{N} : k \leqslant (\log d)^\alpha < k + 1/(\log x)^\beta\}. \tag{1·5}$$

1. Une coquille s'est glissée dans définition de $\alpha_0(\sigma)$ apparaissant à la fin de cet énoncé. Il faut lire

$$\alpha_0(\sigma) := \begin{cases} (1-\log 2)(\sigma_0 - \sigma) & \text{si } -1 < \sigma < \sigma_0, \\ \sigma_0 - \sigma & \text{si } \sigma > \sigma_0. \end{cases}$$

Cela fournit la majoration

$$\min_{d|n,\, d>1} \|(\log d)^\alpha\| \leqslant 1/\tau(n)^{\lambda(\alpha)+o(1)} \quad \text{pp} \qquad (\alpha > 0), \tag{1·6}$$

où l'on a posé $\lambda(\alpha) := \min\{1, \alpha/(1-\log 2)\}$. Cette estimation est essentiellement optimale. Considérons, en effet, l'ensemble $\mathcal{L}$ des nombres réels positifs α tels que $\big\{(\log d)^\alpha : d > 1\big\} \cap \mathbb{N} = \varnothing$. Nous avons

$$\min_{d|n,\, d>1} \|(\log d)^\alpha\| = 1/\tau(n)^{\lambda(\alpha)+o(1)} \quad \text{pp} \qquad (\alpha \in \mathcal{L}). \tag{1·7}$$

La minoration contenue dans (1·7) résulte du lemme 6.3 de [13], qui permet de majorer directement le nombre des entiers $n \leqslant x$ possédant un diviseur d dans l'ensemble (1·5).

L'objet essentiel du présent travail consiste à développer la méthode des suites de Behrend dans le cadre du problème (1·4), qui est à bien des égards exemplaire, sinon représentatif du cas général.

Notre résultat principal est l'obtention de l'évaluation statistique optimale (1·1) lorsque ϑ parcourt un certain ensemble $\mathcal{E}$ de nombre réels, contenant les nombres algébriques irrationnels et dont le complémentaire est de mesure de Hausdorff nulle.

L'ensemble $\mathcal{E}$ peut être décrit simplement en termes de fractions continues. Pour chaque nombre réel ϑ, nous désignons par $\{p_j(\vartheta)/q_j(\vartheta)\}_{j\geqslant 1}$ la suite des réduites de ϑ — ou simplement $\{p_j/q_j\}_{j\geqslant 1}$ lorsqu'aucune confusion n'est à craindre. Nous définissons alors formellement $\mathcal{E}$ comme l'ensemble des nombres irrationnels ϑ tels que

$$\log q_{j+1}(\vartheta) \leqslant \{\log q_j(\vartheta)\}^{1+o(1)} \qquad (j \to \infty). \tag{1·8}$$

Le théorème 31 de [12][2] permet de justifier immédiatement que $\mathbb{R} \smallsetminus \mathcal{E}$ est négligeable au sens de Lebesgue, et, en fait, le résultat obtenu au cours de la démonstration donnée dans [12] implique que la dimension de Hausdorff de $\mathbb{R}\smallsetminus\mathcal{E}$ est nulle. Par ailleurs, il découle aisément du critère de Liouville que tous les nombres algébriques appartiennent à $\mathcal{E}$.

Théorème 1.1. *Soit* $\vartheta \in \mathcal{E}$. *On a*

$$\min_{d\,|\,n} \|d\vartheta\| = 1/\tau(n)^{1+o(1)} \quad \text{pp.} \tag{1·9}$$

Il est à noter qu'une restriction concernant l'ensemble des valeurs de ϑ est certainement nécessaire à la validité de (1·9). On peut, en effet, construire très facilement des nombres irrationnels ϑ contrevenant à (1·9). Soient $\varepsilon \in]0,1[$ et $t \mapsto \psi(t)$ une fonction croissante définie sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs positives et tendant

2. Voir [11] pour un résultat plus précis.

vers l'infini avec t de sorte que $\psi(t) = o(t)$. Si les réduites p_j/q_j $(j \geqslant 1)$ de ϑ sont telles que $q_j < \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{2}\varepsilon q_{j+1})$ pour tout $j \geqslant 2$, on déduit immédiatement de l'inégalité

$$|\vartheta - p_j/q_j| \leqslant 1/(q_j q_{j+1}) \qquad (j \geqslant 1)$$

que $\min_{d|n} \|\vartheta d\| \geqslant 1/(2q_j) > 1/\psi(n)$ lorsque $\frac{1}{2}\varepsilon q_{j+1} < n \leqslant \frac{1}{2}q_{j+1}$, $(n, q_j) = 1$. En choisissant, par exemple, q_j premier pour tout $j \geqslant 2$, ce qui est possible d'après le théorème de Dirichlet, nous obtenons donc que la minoration

$$\min_{d|n} \|\vartheta d\| > 1/\psi(n)$$

est valide lorsque n décrit une suite d'entiers de densité supérieure au moins égale à $1 - \varepsilon$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du Théorème 1.1.

Corollaire 1.2. *Soient $\varepsilon > 0$, $\vartheta \in \mathcal{E}$. Alors*

$$\mathcal{B}(\varepsilon, \vartheta) := \{n \geqslant 2 : \|\vartheta n\| \leqslant \tau(n)^{-1+\varepsilon}\}$$

est une suite de Behrend.

2. Preuve du Théorème 1.1 : minoration

2·1. Réduction du problème

La démonstration de la minoration contenue dans (1·9), dont le principe a été brièvement décrit dans [16] (voir les commentaires qui suivent l'énoncé du corollaire 9), repose sur le résultat intermédiaire suivant, qui possède un intérêt propre.

Pour chaque nombre irrationnel ϑ, nous posons

$$q(\vartheta; Q) := \inf\{q : 1 \leqslant q \leqslant Q,\, \|q\vartheta\| \leqslant 1/Q\} \qquad (Q \in \mathbb{N}^*),$$
$$q(\vartheta; z) := q(\vartheta; [z]) \qquad (z \geqslant 1),$$

et nous définissons, pour $c > 0$, l'ensemble

$$E(c) := \big\{\vartheta \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q} : \liminf_{z\to\infty} q(\vartheta; z)/(\log z)^c > 0\big\}.$$

Théorème 2.1. *Soient $\varrho \in]\log 2, \infty[$ et $\vartheta \in E(2\varrho)$. Posons*

$$\mathcal{W}(\vartheta, \varrho) := \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant 2,\, \|n\vartheta\| \leqslant 1/(\log n)^{\varrho}\}.$$

Alors il existe $\gamma > \log 2 + \frac{1}{2}$ *tel que*

$$\sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\ n\in\mathcal{W}(\vartheta,\varrho)}} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\Omega(n)} \ll N/(\log N)^\gamma \qquad (N \geqslant 2). \tag{2·1}$$

En particulier, pour $\log 2 - \frac{1}{2} < \beta < \gamma - 1$, *on a*

$$\sum_{n\in\mathcal{W}(\vartheta,\varrho)} \frac{(\log n)^\beta}{n2^{\Omega(n)}} < \infty. \tag{2·2}$$

Nous notons au passage, bien ce ne soit pas directement lié à la preuve du Théorème 1.1, qu'un résultat de Hall ([8], théorème 1), permet de déduire immédiatement de (2·2) l'énoncé suivant, qui vient compléter le Corollaire 1.2.

Corollaire 2.2. *Soient* $\varrho \in]\log 2, \infty[$ *et* $\vartheta \in E(2\varrho)$. *Alors* $\mathcal{W}(\vartheta,\varrho)$ *n'est pas une suite de Behrend.*

Bien entendu, en vertu du théorème bien connu de Hardy et Ramanujan sur l'ordre normal de $\tau(n)$, la même assertion est valable, pour chaque $\varepsilon > 0$, pour la suite

$$\mathcal{W}^*(\vartheta,\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N}^* : \|\vartheta n\| \leqslant \tau(n)^{-1-\varepsilon}\}.$$

Avant d'aborder la démonstration du Théorème 2.1, voyons comment il implique la minoration

$$\min_{d|n} \|\vartheta d\| \geqslant 1/\tau(n)^{1+o(1)} \quad \text{pp} \qquad (\vartheta \in E(2\varrho)). \tag{2·3}$$

Il est à noter que ce résultat est en fait légèrement plus fort que la minoration contenue dans (1·9) puisque l'on a $\mathcal{E} \subset E(c)$ pour tout $c > 0$.

Posons

$$\Omega(n,d) := \sum_{p^\nu\,|n,\, p\leqslant d} \nu, \qquad \Omega(n) := \sum_{p^\nu\|n} \nu.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $\xi(x)$ une fonction arbitraire tendant vers l'infini. D'après la version arithmétique de la loi du logarithme itéré (voir, par exemple, [9], théorème 11), on a

$$\sup_{d|n,\, d>3} \{\Omega(n,d) - (1+\varepsilon)\log_2 d\} \leqslant \xi(x) \tag{2·4}$$

pour tous les entiers $n \leqslant x$ sauf au plus $o(x)$. Soit alors $\varrho > \log 2$. Pour chaque entier $n \leqslant x$ satisfaisant (2·4) et

$$\min_{d|n} \|\vartheta d\| \leqslant 1/(\log x)^\varrho, \tag{2·5}$$

on a donc

$$1 \leqslant 2^{\xi(x)} \sum_{\substack{d\mid n \\ \|\vartheta d\|\leqslant 1/(\log x)^{\varrho}}} \frac{(\log d)^{(1+\varepsilon)\log 2}}{2^{\Omega(n,d)}}.$$

Par sommation de cette inégalité (en faisant appel, par exemple, au corollaire III.5.1 de [14]), nous obtenons que le nombre N_x des entiers $n \leqslant x$ satisfaisant (2·5) vérifie

$$N_x \ll x2^{\xi(x)}\Bigg\{ \sum_{\substack{d\leqslant\sqrt{x} \\ \|\vartheta d\|\leqslant 1/(\log x)^{\varrho}}} \frac{(\log d)^{\beta}}{d2^{\Omega(d)}} + \sum_{\substack{\sqrt{x}<d\leqslant x \\ \|\vartheta d\|\leqslant 1/(\log x)^{\varrho}}} \frac{(\log x)^{\beta+1/2}}{d2^{\Omega(d)}\sqrt{\log(2x/d)}}\Bigg\} + o(x)$$

avec $\beta := (1+\varepsilon)\log 2 - 1/2$. D'après le Théorème 2.1, la somme en d tend vers 0 pour un choix convenable de ε et une sommation d'Abel standard, dont nous omettons les détails, permet de déduire de (2·1) qu'il en va de même de la seconde. En sélectionnant une fonction $\xi(x)$ à croissance suffisamment lente, nous obtenons donc bien $N_x = o(x)$, ce qui équivaut au résultat annoncé. □

2·2. Sommes d'exponentielles à coefficients multiplicatifs

Notons, selon la tradition, $\mathrm{e}(u) := \mathrm{e}^{2\pi i u}$ $(u \in \mathbb{R})$. Notre preuve du Théorème 2.1 repose sur des majorations de

$$T_z(x;\vartheta) := \sum_{n\leqslant x} z^{\Omega(n)}\mathrm{e}(n\vartheta)$$

en fonction des approximations rationnelles de ϑ lorsque $z = \frac{1}{2}$. En vue d'applications ultérieures, nous énonçons un résultat un peu plus général.

Lemme 2.3. *Sous les conditions* $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leqslant 1$, $x \geqslant 2$, $q \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q \leqslant x$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a,q) = 1$, $|\vartheta - a/q| \leqslant 1/q^2$, *on a*

$$T_z(x;\vartheta) \ll x(\log x)^4\Bigg\{\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{\log q}}}{\sqrt{q}} + \Big(\frac{q}{x}\Big)^{1/4} + \mathrm{e}^{-\sqrt{\log x}}\Bigg\}. \tag{2·6}$$

La majoration (2·6) est établie au lemme 6.6 de [1] dans le cas où la fonction de Piltz $\tau_z(n)$ remplace $z^{\Omega(n)}$ dans la définition de $T_z(x;\vartheta)$. Les modifications nécessaires pour obtenir le présent énoncé étant banales lorsque $|z| \leqslant 1$, nous omettons les détails.

L'inégalité

$$q(h\vartheta; 2z) \geqslant q(\vartheta; z)/h \quad (z \geqslant 1,\ h \in \mathbb{N}^*), \tag{2·7}$$

établie au lemme 6.2 de [1], nous permet de déduire immédiatement du Lemme 2.3 le résultat suivant.

Corollaire 2.4. *On a, uniformément pour $x \geqslant 2$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leqslant 1$, $1 \leqslant R \leqslant x$, $1 \leqslant h \leqslant R/2$, $q(\vartheta; x/R) \geqslant R$,*

$$T_z(x; h\vartheta) \ll x(\log x)^4 \Big\{(h/R)^{1/4} + \mathrm{e}^{-\sqrt{\log x}}\Big\}. \tag{2·8}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer (2·6) à $h\vartheta$ avec $q = q(h\vartheta; 2xh/R) \geqslant R/h$. □

2·3. Preuve du Théorème 2.1

Nous pouvons pleinement supposer $\varrho < 1$.

Désignons par S_N le membre de gauche de (2·1) et, pour $N \geqslant 2$, posons $H = H_N := 3\,[(\log 2N)^\varrho]$. Pour chaque entier n de $]N, 2N] \cap \mathcal{W}(\vartheta, \varrho)$, on a

$$1 \ll \Big(\frac{\sin \pi H n\vartheta}{H \sin \pi n\vartheta}\Big)^2 = \frac{1}{H} \sum_{|h| \leqslant H} \Big(1 - \frac{|h|}{H}\Big) \mathrm{e}(hn\vartheta).$$

Il s'ensuit que

$$S_N \ll \frac{1}{H} \sum_{0 \leqslant h \leqslant H} |S_N(h)|,$$

avec

$$S_N(h) := \sum_{N < n \leqslant 2N} \frac{\mathrm{e}(hn\vartheta)}{2^{\Omega(n)}}.$$

On a classiquement

$$S_N(0) \ll N/\sqrt{\log N},$$

ce qui, compte tenu du choix de ϱ, est bien compatible avec (2·1).

Il reste à estimer $S_N(h)$ pour $1 \leqslant h \leqslant H$. À cette fin, nous introduisons le nombre entier $q := q\big(\vartheta; N/(\log N)^{25}\big)$.

Si $q > (\log N)^{25}$, on déduit immédiatement du Corollaire 2.4 appliqué avec $z = \frac{1}{2}$ que

$$S_N(h) \ll \frac{NH^{1/4}}{(\log N)^{9/4}} \ll \frac{N}{(\log N)^2} \qquad (1 \leqslant h \leqslant H),$$

ce qui implique bien (2·1).

Si $q \leqslant (\log N)^{25}$, il existe un entier a tel que $|\vartheta - a/q| \leqslant (\log N)^{25}/qN$, et nous posons $a_h := ah/(q,h)$, $q_h := q/(q,h)$, $\beta_h := h\vartheta - a_h/q_h$. Nous avons donc

$$q_h \ll (\log N)^{25}, \quad |\beta_h| \ll (\log N)^{25+\varrho}/N. \tag{2·9}$$

D'après le lemme 6 de [16], il existe une constante $c_0 > 0$ telle que l'on ait

$$T_{1/2}(x; a_h/q_h) = M_h(x) + O\big(N\mathrm{e}^{-c_0(\log N)^{1/3}}\big) \qquad (N < x \leqslant 2N) \tag{2·10}$$

avec

$$M_h(x) := \sum_{t|q_h} \frac{\mu(t)2^{\Omega(t)}}{\varphi(t)2^{\Omega(q_h)}} \sum_{\substack{n\leqslant tx/q_h\\(n,t)=1}} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\Omega(n)},$$

où, ici et dans la suite, nous désignons par φ la fonction indicatrice d'Euler et μ la fonction de Möbius. Reportons la décomposition (2·10) dans la formule intégrale

$$S_N(h) = \int_N^{2N} \mathrm{e}(\beta_h x)\,\mathrm{d}T_{1/2}(x; a_h/q_h).$$

La contribution du terme d'erreur relève d'une simple intégration par parties. On obtient qu'elle est

$$\ll \beta_h N^2 \mathrm{e}^{-c_0(\log N)^{1/3}} \ll N\mathrm{e}^{-c_1(\log N)^{1/3}}$$

pour toute constante $c_1 < c_0$.

La contribution du terme principal est traitée en utilisant l'inégalité entre mesures de Stieltjes

$$|\mathrm{d}M_h(x)| \leqslant \mathrm{d}\Big\{\sum_{t|q_h} \frac{1}{\varphi(t)} \sum_{n\leqslant tx/q_h} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\Omega(n)}\Big\}.$$

Nous obtenons ainsi que cette contribution est

$$\ll \frac{1}{q_h}\sum_{t|q_h} \frac{tN}{\varphi(t)\sqrt{\log N}} \ll \frac{\tau(q_h)N}{\varphi(q_h)\sqrt{\log N}} \ll \frac{N}{(\log N)^{1/2+\varrho+o(1)}}.$$

Cela implique encore (2·1) et achève ainsi la démonstration.

3. Moments de $L(1,\chi;y)$

Notre preuve de la majoration contenue dans (1·9) repose sur une analyse assez délicate des propriétés des classes de congruences modulo les dénominateurs des réduites de ϑ. Nous nous proposons dans ce paragraphe d'établir certains résultats auxiliaires nécessaires à cette analyse.

Désignons par $P^+(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier $n > 1$, et convenons de poser $P^+(1) = 1$. Nous définissons, pour tout caractère de Dirichlet χ et tout nombre réel $y \geqslant 2$, la série

$$L(s,\chi;y) := \sum_{P^+(n)\leqslant y} \frac{\chi(n)}{n^s}, \tag{3·1}$$

qui converge en tout point du demi-plan $\sigma = \mathrm{Re}\, s > 0$.

L'énoncé suivant fournit, pour chaque valeur du paramètre $b \geqslant 1$, une majoration uniforme en y de $|L(1,\chi;y)|^b$ en moyenne sur les caractères non principaux. Nous notons χ_0 le caractère principal modulo q.

Théorème 3.1. *Soit* $b \geqslant 1$. *On a pour* $q \geqslant 2$, $y \geqslant 2$,

$$\sum_{\substack{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)\\ \chi\neq\chi_0}} |L(1,\chi;y)|^b \ll \varphi(q)(\log_2 2q)^b. \tag{3·2}$$

Plus précisément, on a sous les mêmes hypothèses

$$\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)} |L(1,\chi;y)|^b \ll \varphi(q)\Big\{1+\frac{(\log y)^b(\log_2 2q)^b}{(\log q)^b}\Big\} \tag{3·3}$$

et

$$\sum_{\substack{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)\\ \chi\neq\chi_0}} |L(1,\chi;y)|^b \ll \varphi(q)\Big\{1+\frac{(\log q)^b(\log_2 2q)^b}{(\log y)^b}\Big\}. \tag{3·4}$$

Démonstration. Montrons d'abord (3·3). Nous notons que, pour tout $c>0$,

$$L(1,\chi;y)^c = \sum_{P^+(n)\leqslant y} \frac{\tau_c(n)\chi(n)}{n}$$

où τ_c est la fonction de Piltz d'indice c. Soit $z := \min\big(y, 2q^{1/(\log_2 2q)}\big)$. On a alors, en vertu d'estimations classiques sur le cardinal des entiers friables,

$$\sum_{\substack{n>q\\ P^+(n)\leqslant z}} \frac{|\tau_c(n)|}{n} \ll 1. \tag{3·5}$$

Dans le cas $c=1$, cette majoration découle aisément, par exemple, de l'évaluation obtenue à la fin de la preuve du corollaire 2 de [18]. On obtient même que le membre de gauche est $\ll_A 1/(\log z)^A$ pour tout nombre réel $A>0$. Le cas général s'en déduit, grâce à l'inégalité de Cauchy–Schwarz, compte tenu de la majoration

$$\sum_{P^+(n)\leqslant z} \frac{\tau_c(n)^2}{n} \ll (\log z)^{c^2}.$$

De plus,

$$L(1,\chi;y) = L(1,\chi;z)\prod_{z<p\leqslant y}\Big(1-\frac{\chi(p)}{p}\Big)^{-1} \ll L(1,\chi;z)\frac{\log y}{\log z}.$$

On obtient donc

$$\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)} |L(1,\chi;y)|^b \ll \Big(\frac{\log y}{\log z}\Big)^b \sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)} |L(1,\chi;z)^{b/2}|^2.$$

Or, on a, d'après (3·5),

$$\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)} |L(1,\chi;z)^{b/2}|^2 \ll \sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)} \Bigg\{1+\Bigg|\sum_{\substack{P^+(n)\leqslant z\\ n\leqslant q}} \frac{\chi(n)\tau_{b/2}(n)}{n}\Bigg|^2\Bigg\}$$
$$\ll \varphi(q)\Bigg\{1+\sum_{\substack{P^+(n)\leqslant z\\ n\leqslant q}}\frac{\tau_{b/2}(n)^2}{n^2}\Bigg\} \ll \varphi(q).$$

Montrons maintenant (3·4). Étant donnée une constante absolue C assez grande pour que $\prod_{\chi\neq\chi_0} L(s,\chi)$ ait au plus un zéro dans la région

$$\sigma > 1 - 18/\{C\log((1+|\tau|)q)\},$$

nous posons

$$Z := \max(y, q^{C\log_2 2q}).$$

Convenons de poser $\vartheta(\chi)=1$ si χ est le caractère exceptionnel de Siegel et $\vartheta(\chi)=0$ dans le cas contraire. On déduit du lemme 6.3 de [4] que, pour chaque caractère non principal de module q, on a

$$L(1,\chi;Z) \ll L(1,\chi)\Big\{1+\vartheta(\chi)\widehat{\omega}\big((1-\beta)\log Z\big)\Big\}$$

où

$$\widehat{\omega}(s) := -1+\frac{1}{s}\exp\Big\{-\gamma+\int_0^s (1-\mathrm{e}^{-v})\frac{\mathrm{d}v}{v}\Big\}$$

est la transformée de Laplace de la fonction de Buchstab. On a clairement

$$1+\widehat{\omega}(s) \ll \frac{1+s}{s} \qquad (s>0).$$

On peut donc écrire, en notant χ_1 l'éventuel caractère exceptionnel de Siegel,[3]

$$\sum_{\substack{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)\\ \chi\neq\chi_0}} |L(1,\chi;Z)|^b \ll \sum_{\substack{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)\\ \chi\neq\chi_0}} |L(1,\chi)|^b + \frac{L(1,\chi_1)^b}{(1-\beta)^b(\log Z)^b}. \tag{3·6}$$

Comme on a classiquement, pour tout $\chi\neq\chi_0$,

$$L(1,\chi) = \sum_{n\leqslant q}\frac{\chi(n)}{n} + O(1),$$

3. On rappelle que χ_1 est réel et que $L(1,\chi_1)>0$.

nous pouvons écrire, pour tout entier $B \geqslant \frac{1}{2}b$, et en notant $\tau_B(n,q)$ le nombre de représentations de n sous forme d'un produit de B entiers n'excédant pas q,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)\\ \chi\neq\chi_0}} |L(1,\chi)|^{2B} &\ll \varphi(q) + \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)\\ \chi\neq\chi_0}} \Big| \sum_{n\geqslant 1} \frac{\chi(n)\tau_B(n,q)}{n}\Big|^2 \\ &\ll \varphi(q) + \varphi(q) \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\ (a,q)=1}} \Big| \sum_{n\equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)} \frac{\tau_B(n,q)}{n} - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(n,q)=1} \frac{\tau_B(n,q)}{n}\Big|^2.\end{aligned}$$

Maintenant, nous observons que

$$\sum_n \frac{\tau_B(n,q)}{n} \ll (\log q)^B$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n\equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)} \frac{\tau_B(n,q)}{n} &\ll \frac{\tau_B(a,q)}{a} + \sum_{1\leqslant \ell\leqslant q^{B-1}} \frac{\tau_B(a+\ell q)}{\ell q} \\ &\ll \frac{\tau_B(a,q)}{a} + \frac{1}{q^{2/3}}\end{aligned}$$

Cela implique

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\ (a,q)=1}} \Big| \sum_{n\equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)} \frac{\tau_B(n,q)}{n} - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\tau_B(n,q)}{n}\Big|^2 &\ll \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\ (a,q)=1}} \Big\{\frac{\tau_B(a,q)^2}{a^2} + \frac{1}{q^{4/3}}\Big\} \\ &\ll 1.\end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu que

$$\sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)\\ \chi\neq\chi_0}} |L(1,\chi)|^{2B} \ll \varphi(q),$$

et la même majoration vaut *a fortiori* en remplaçant $2B$ par b.[4] En adjoignant à cette majoration l'estimation classique (voir, par exemple, [3], p. 95)

$$L(1,\chi_1) \ll (1-\beta)(\log q)^2,$$

nous obtenons donc, en reportant dans (3·6),

$$\sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)\\ \chi\neq\chi_0}} |L(1,\chi;Z)|^b \ll \varphi(q).$$

4. Voir le lemme 2 de [6] pour un résultat plus précis dans le cas $b = 2$.

Cela fournit bien (3·4) puisque

$$L(1,\chi;y)=L(1,\chi;Z)\prod_{y<p\leqslant Z}\big(1-\chi(p)/p\big)\ll L(1,\chi;Z)\frac{\log Z}{\log y}.$$

□

Posons

$$N_q(x,\chi):=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\chi(n)\qquad(x\geqslant 0),\tag{3·7}$$

et notons d'emblée que l'inégalité de Pólya–Vinogradov implique

$$|N_q(x,\chi)|\leqslant 2\sqrt{q}\log q\qquad(\chi\neq\chi_0).\tag{3·8}$$

L'assertion suivante concernant les quantités $N_q(x,\chi)$ est un corollaire facile du Théorème 3.1.

Lemme 3.2. *Soit* $\varepsilon\in\big]0,\frac12\big[$. *On a uniformément pour* $q\geqslant 2$, $1\leqslant x\leqslant q$, $y\geqslant 2$,

$$\sum_{\substack{\chi(\bmod q)\\ \chi\neq\chi_0}}|N_q(x,\chi)|^2|L(1,\chi;y)|\ll\varphi(q)x\Big(\frac{q\log q}{x}\Big)^{\varepsilon}.\tag{3·9}$$

Démonstration. Soit $b>2/\varepsilon$. Nous déduisons immédiatement de l'inégalité de Hölder et de (3·2) et (3·8) que le membre de gauche de (3·9) est

$$\begin{aligned}&\leqslant\Big\{\sum_{\substack{\chi(\bmod q)\\ \chi\neq\chi_0}}N_q(x,\chi)^{2+2/(b-1)}\Big\}^{(b-1)/b}\Big\{\sum_{\substack{\chi(\bmod q)\\ \chi\neq\chi_0}}|L(1,\chi;y)|^b\Big\}^{1/b}\\&\ll q^{1/b}(\log q)^{2/b}S^{(b-1)/b}\varphi(q)^{1/b}\log_2 2q\end{aligned}$$

avec

$$S:=\sum_{\chi(\bmod q)}|N_q(x,\chi)|^2\ll x\varphi(q).$$

Cela fournit bien l'estimation souhaitée. □

4. Représentations de classes de congruence

Soient $q\in\mathbb{N}$, $q\geqslant 2$, $\varrho\in[0,\log 2[$ et $Q:=q/(\log q)^{\varrho}$. Pour $m\geqslant 1$, nous désignons par $Z_{q,\varrho}(m)$ le nombre de classes de congruence $a\,(\mathrm{mod}\,q)$ admettant au moins une représentation de la forme

$$a\equiv h\overline{d}\,(\mathrm{mod}\,q)\qquad\text{avec}\quad (d,q)=(h,q)=1,\quad d\,|\,m,\quad 1\leqslant h\leqslant Q. \tag{4·1}$$

Notre démonstration du volet majoration du Théorème 1.1 nécessite de prouver que $Z_{q,\varrho}(m)$ est proche de $\varphi(q)$ lorsque m parcourt un certain ensemble que nous décrirons plus loin.

Posons

$$\tau(m;a,q):=\sum_{\substack{d\,|\,m\\ d\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}}1.$$

Le nombre de représentations sous la forme (4·1) de la classe inversible a modulo q vaut

$$R(m;a,q):=\sum_{\substack{1\leqslant h\leqslant Q\\ (h,q)=1}}\tau(m;\overline{a}h,q). \tag{4·2}$$

On constate ainsi que $Z_{q,\varrho}(m)$ représente le nombre des classes inversibles a telles que $R(m;a,q)\neq 0$.

Désignant par $\tau_q(m)$ le nombre de diviseurs de m premiers avec q, on a, lorsque $(h,q)=1$,

$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\ (a,q)=1}}\tau(m;\overline{a}h,q)=\tau_q(m)\qquad\big((h,q)=1\big),$$

d'où, par une simple interversion de sommations,

$$\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\ (a,q)=1}}R(m;a,q)=\frac{N_q(Q)}{\varphi(q)}\tau_q(m), \tag{4·3}$$

avec la notation

$$N_q(Q):=N_q(Q,\chi_0)=\sum_{\substack{n\leqslant Q\\ (n,q)=1}}1.$$

L'ordre de grandeur heuristique du membre de gauche de (4·3) est

$$\frac{\varphi(q)}{q^2}Q\tau(m)=\frac{\varphi(q)\tau(m)}{q(\log q)^{\varrho}}.$$

Soit alors $\varepsilon>0$. Il découle de ce qui précède que, lorsque l'entier m se comporte statistiquement sous la contrainte $\tau(m)>(\log q)^{\varrho(1+\varepsilon)}$, nous sommes en position de conjecturer que $R(m;a,q)$ est non nul pour presque toutes les classes a telle que $(a,q)=1$ — autrement dit que $Z_{q,\varrho}(m)$ est effectivement proche de $\varphi(m)$.

Posons, pour $k\geqslant 1$,

$$r_k := \exp\exp k \tag{4·4}$$

et désignons, pour chaque nombre entier $n\geqslant 2$, par n_k le produit des facteurs premiers de n n'excédant pas r_k, soit

$$n_k := \prod_{\substack{p^\nu \| n\\ p\leqslant r_k}} p^\nu. \tag{4·5}$$

Nous allons montrer par un argument de variance que $Z_{q,\varrho}(n_k)$ est usuellement proche de $\varphi(q)$ lorsque $k>(1+\varepsilon)\log_2 q$.

Nous notons d'emblée que l'estimation classique

$$N_q(x)=x\frac{\varphi(q)}{q}+O\big(2^{\omega(q)}\big)\qquad (x\geqslant 1,\ q\geqslant 1), \tag{4·6}$$

où ω désigne la fonction « nombre de facteurs premiers » comptés sans multiplicité, résulte d'une banale application de la formule d'inversion de Möbius.

Lemme 4.1. *Soient $\varrho\in[0,\log 2[$ et $\varepsilon\in]0,\frac{1}{10}(\log 2-\varrho)]$. Il existe un nombre entier $q_0\geqslant 1$ tel que l'on ait, uniformément pour $x\geqslant r_k$ et $q_0\leqslant q\leqslant \exp\exp\big\{(1+\varepsilon)k\big\}$,*

$$Z_{q,\varrho}(n_k)\geqslant\big\{1-(\log q)^{-\varepsilon}\big\}\varphi(q)$$

pour tous les nombres entiers $n\leqslant x$ sauf au plus $O\big(x/(\log q)^{\varepsilon^2}\big)$ exceptions.

Démonstration. Rappelons la notation $Q:=q/(\log q)^\varrho$. Pour tous entiers m, h tels que $m\geqslant 1$, $1\leqslant h\leqslant Q$, $(h,q)=1$, on a

$$\begin{aligned}\tau(m;\overline{a}h,q)&=\sum_{d\,|\,m}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi(\operatorname{mod} q)}\overline{\chi(\overline{a}h)}\chi(d)\\&=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi(\operatorname{mod} q)}\chi(a)\overline{\chi(h)}\tau_q(m,\chi)\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\tau_q(m,\chi):=\sum_{d\,|\,m}\chi(d).$$

Il s'ensuit que, avec la notation (4·2),

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}R(m;a,q)^2&=\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant h\leqslant Q\\(h,q)=1}}\tau(m;\overline{a}h,q)\Bigg)^2\\&=\frac{1}{\varphi(q)^2}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\Bigg(\sum_{\chi(\operatorname{mod} q)}\chi(a)\overline{N_q(Q,\chi)}\tau_q(m,\chi)\Bigg)^2,\end{aligned}$$

où $N_q(Q,\chi)$ est défini par (3·7). En développant les carrés et en utilisant l'orthogonalité des caractères, nous obtenons

$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}} R(m;a,q)^2 = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod q} |N_q(Q,\chi)|^2 |\tau_q(m,\chi)|^2. \tag{4·7}$$

Par ailleurs, l'identité (4·3) implique, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\big\{N_q(Q)\tau_q(m)\big\}^2 = \Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}} R(m;a,q)\Bigg)^2 \leqslant Z_{q,\varrho}(m) \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}} R(m;a,q)^2. \tag{4·8}$$

Nous déduisons de (4·7) et (4·8), que

$$\big\{N_q(Q)\tau_q(m)\big\}^2 \leqslant \frac{Z_{q,\varrho}(m)}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod q} |N_q(Q,\chi)|^2 |\tau_q(m,\chi)|^2,$$

d'où nous tirons immédiatement que

$$\frac{\varphi(q) - Z_{q,\varrho}(m)}{\varphi(q)} \leqslant \sum_{\substack{\chi \pmod q\\ \chi\neq\chi_0}} \frac{|N_q(Q,\chi)|^2}{N_q(Q)^2} \frac{|\tau_q(m,\chi)|^2}{\tau_q(m)^2}. \tag{4·9}$$

L'étape suivante de la démonstration consiste à utiliser (4·9) pour montrer que, pour tous les nombres entiers $n \leqslant x$ sauf au plus $O\big(x/(\log q)^\varepsilon\big)$ exceptions, on a

$$Z_{q,\varrho}(n_k) \geqslant \varphi(q)\bigg(1 - \frac{\varphi(q)(\log q)^{3\varepsilon}}{N_q(Q)\tau_q(n_k)}\bigg). \tag{4·10}$$

Considérons, en effet, le nombre R_1 des entiers $n \leqslant x$ contrevenant à (4·10). Nous avons

$$R_1 \leqslant \sum_{n\leqslant x} \frac{N_q(Q)\tau_q(n_k)}{\varphi(q)(\log q)^{3\varepsilon}} \bigg(\frac{\varphi(q) - Z_{q,\varrho}(n_k)}{\varphi(q)}\bigg).$$

L'inégalité (4·9) implique donc

$$\begin{aligned} R_1 &\leqslant \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{\varphi(q)(\log q)^{3\varepsilon}} \sum_{\substack{\chi \pmod q\\ \chi\neq\chi_0}} \frac{|N_q(Q,\chi)|^2}{N_q(Q)} \frac{|\tau_q(n_k,\chi)|^2}{\tau_q(n_k)} \\ &= \frac{1}{\varphi(q)N_q(Q)(\log q)^{3\varepsilon}} \sum_{\substack{\chi \pmod q\\ \chi\neq\chi_0}} |N_q(Q,\chi)|^2 \sum_{n\leqslant x} \frac{|\tau_q(n_k,\chi)|^2}{\tau_q(n_k)}. \end{aligned} \tag{4·11}$$

La somme intérieure relève des techniques usuelles de majorations de sommes de fonctions multiplicatives positives ou nulles. On obtient ainsi (cf., par exemple, [5] ou [14], corollaire III.3.5.1)

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{|\tau_q(n_k,\chi)|^2}{\tau_q(n_k)}\ll x\prod_{p\leqslant r_k}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\frac{|1+\chi(p)|^2}{2p}\Big)\ll x|L(1,\chi;r_k)|\qquad(x\geqslant r_k),$$

où $L(1,\chi;r_k)$ est défini par (3·1). Compte tenu du Lemme 3.2, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)\\ \chi\neq\chi_0}}|N_q(Q,\chi)|^2\sum_{n\leqslant x}\frac{|\tau_q(n_k,\chi)|^2}{\tau_q(n_k)}&\ll x\sum_{\substack{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)\\ \chi\neq\chi_0}}|N_q(Q,\chi)|^2|L(1,\chi;r_k)|\\ &\ll x\varphi(q)Q(\log q)^{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Comme il résulte de (4·6) que

$$N_q(Q)\gg\frac{\varphi(q)Q}{q}\gg\frac{q}{(\log q)^{\varrho}\log_2 2q},\tag{4·12}$$

nous obtenons en reportant dans (4·11) que

$$R_1\ll\frac{xQ}{N_q(Q)(\log q)^{2\varepsilon}}\ll\frac{xq}{\varphi(q)(\log q)^{2\varepsilon}}\ll\frac{x}{(\log q)^{\varepsilon}}.$$

À ce stade, nous observons que, pour tous les entiers $n\leqslant x$ sauf au plus $\ll x/(\log q)^{\varepsilon^2}$, on a

$$\tau_q(n_k)\geqslant 2^{(1-2\varepsilon)k}>(\log q)^{\varrho+5\varepsilon},\tag{4·13}$$

où la seconde inégalité résulte banalement de la contrainte imposée au paramètre ε. En effet, le nombre R_2 des entiers $n\leqslant x$ contrevenant à (4·13) vérifie, pour tout $v\geqslant 0$,

$$R_2\leqslant\sum_{n\leqslant x}\frac{2^{(1-2\varepsilon)kv}}{\tau_q(n_k)^v}.$$

La dernière somme peut être aisément estimée, par exemple grâce à une nouvelle application du corollaire III.3.5.1 de [14]. En employant la majoration

$$\sum_{p|q}\frac{1}{p}\leqslant\log_3 3q+O(1)\leqslant\log k+O(1),$$

nous obtenons ainsi

$$R_2\ll kx\mathrm{e}^{A(v)k}\qquad(x\geqslant r_k)$$

avec $A(v) := (1-2\varepsilon)v\log 2 - 1 + 2^{-v}$. En opérant le choix optimal $2^v = 1/(1-2\varepsilon)$ et en tenant compte de l'inégalité $k \geqslant (\log_2 q)/(1+\varepsilon)$, nous obtenons bien

$$R_2 \ll x/(\log q)^{\varepsilon^2}.$$

Lorsque n satisfait à la fois (4·10) et (4·13), nous pouvons écrire, compte tenu de (4·12), pour q assez grand,

$$Z_{q,\varrho}(n_k) \geqslant \varphi(q)\Big(1 - \frac{\varphi(q)}{N_q(Q)(\log q)^{\varrho+2\varepsilon}}\Big) > \varphi(q)\Big(1 - \frac{1}{(\log q)^{\varepsilon}}\Big).$$

Cela implique bien le résultat annoncé. □

5. Preuve du Théorème 1.1 : majoration

Soient $\vartheta \in \mathcal{E}$, $\varrho \in [0, \log 2[$, $\varrho_1 \in]\varrho, \log 2[$, $\varepsilon_0 := \varrho_1 - \varrho$, $\varepsilon_1 := (\log 2 - \varrho_1)/10$ et x_0 un paramètre assez grand dont la valeur sera déterminée plus loin. Pour $x > x_0$, nous posons

$$L := [(1-\varepsilon_0)\log_2 x], \quad M = [(1-\varepsilon_0/2)\log_2 x], \quad \eta := 1/(\log x)^{\varrho}.$$

Pour $k \geqslant 1$, rappelons les définitions (4·4), (4·5) et désignons par E_k le nombre des entiers $n \leqslant x$ tels que

$$\min_{d|n_k} \|\vartheta d\| > \eta.$$

Nous allons montrer que

$$E_M = o(x) \qquad (x \to \infty). \tag{5·1}$$

Soit $\{p_j/q_j\}_{j\geqslant 0}$ la suite des réduites de ϑ. D'après la condition (1·8), il existe une fonction $w(x)$ tendant vers l'infini avec x telle que

$$w(x) = (\log x)^{o(1)} \tag{5·2}$$

$$(\forall x > x_0)\ \exists j \in]L, M[: w(x)\mathrm{e}^k < \log q_j \leqslant w(x)^2\mathrm{e}^k. \tag{5·3}$$

Dans toute la suite de cette démonstration, nous définissons implicitement $s = s_k$ comme le plus petit des indices j satisfaisant (5·3).

La première étape de la démonstration se réduit à montrer que l'on n'altère pas sensiblement E_k en imposant des conditions de normalité aux entiers dénombrés. À cette fin, nous introduisons le nombre E_k^* des entiers comptés dans E_k et satisfaisant en outre aux conditions

(a) $n_k \leqslant q_s^{1/4}$,

(b) $Z_{q_s,\varrho_1}(n_k) \geqslant \big\{1 - (\log q_s)^{-\varepsilon_1}\big\}\varphi(q_s)$,

où $Z_{q,\varrho}(m)$ est la quantité introduite au paragraphe 4.

Montrons d'abord que l'on a, pour chaque entier k de $]L, M]$,

$$E_k^* = E_k + o(x) \qquad (x \to \infty). \tag{5·4}$$

En effet, d'une part, la condition (a) est vérifiée pour tous les nombres entiers $n \leqslant x$ sauf au plus $O\big(x\,\mathrm{e}^{-w(x)/8}\big)$: cela résulte par exemple, compte tenu de la minoration de (5·3), du résultat obtenu dans l'exercice corrigé III.5.6 de [17]. D'autre part, il découle du Lemme 4.1 que la condition (b) est satisfaite sauf pour au plus $O\big(x/(\log x)^{\varepsilon_1^2}\big)$ entiers $n \leqslant x$.

Notre seconde étape consiste à obtenir, sous certaines conditions de taille relatives à l'entier positif r, une minoration de $E_k - E_{k+r}$, ce qui constitue le pas général d'une récurrence qui sera mise en œuvre par la suite. Pour chaque indice k de $]L, M]$ et chaque entier m premier avec q_s, nous désignons par $\mathcal{Z}_m$ l'ensemble des classes modulo q_s qui sont de la forme $\overline{d}q_{s-1}h \,(\mathrm{mod}\, q_s)$ avec

$$d|m, \quad 1 \leqslant h \leqslant Q_s := q_s/(\log q_s)^{\varrho_1}, \quad (h, q_s) = 1.$$

Nous observons immédiatement, à fin de référence ultérieure, que, compte tenu de la relation bien connue $p_{s-1}q_s - p_sq_{s-1} = (-1)^s$ issue de la théorie des fractions continues, on a

$$|\mathcal{Z}_m| = Z_{q_s,\varrho_1}(m). \tag{5·5}$$

Soit F_k le nombre des entiers comptés dans E_k^* et qui satisfont en outre à la condition

(c) $\exists p \,|\, n :\ q_s^{4/3} < p \leqslant q_s^{3/2},\ p \in \mathcal{Z}_{n_k} \,(\mathrm{mod}\, q_s).$

Notre inégalité de récurrence est alors

$$E_k - E_{k+r} \geqslant F_k \qquad (r \geqslant R_x := 2\log w(x) + 1). \tag{5·6}$$

Montrons (5·6). Si n est compté dans F_k, il existe un facteur premier p de n, un diviseur d de n_k et un entier h de $[1, Q_s]$ tels que

$$q_s^{4/3} < p \leqslant q_s^{3/2}, \quad (h, q_s) = 1, \quad d \equiv \overline{p}\, q_{s-1}h \,(\mathrm{mod}\, q_s).$$

La dernière condition implique l'existence de $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $dp = q_{s-1}h + \ell q_s$. Posant $\vartheta = p_s/q_s + \beta/q_s^2$, de sorte que $|\beta| \leqslant 1$, nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} dp\vartheta &= (q_{s-1}h + \ell q_s)\Big(\frac{p_s}{q_s} + \frac{\beta}{q_s^2}\Big) \\ &\equiv \frac{h}{q_s} + \frac{\beta q_{s-1}h}{q_s^2} + \beta\frac{\ell}{q_s} \quad (\mathrm{mod}\, 1). \end{aligned}$$

Comme $2 \leqslant p \leqslant q_s^{3/2}$, $1 \leqslant d \leqslant n_k \leqslant q_s^{1/4}$, $1 \leqslant q_{s-1} \leqslant q_s$ et $1 \leqslant h \leqslant q_s/(\log q_s)^{\varrho_1}$, on a $|\ell| \leqslant \max\{dp, q_{s-1}h\}/q_s \leqslant q_s/(\log q_s)^{\varrho_1}$ et donc

$$\Big|\frac{\beta q_{s-1}h}{q_s^2}\Big| \leqslant \frac{h}{q_s} \leqslant \frac{1}{(\log q_s)^{\varrho_1}} \qquad \text{et} \qquad \Big|\beta\frac{\ell}{q_s}\Big| \leqslant \frac{1}{(\log q_s)^{\varrho_1}}\cdot$$

Il s'ensuit que

$$\|dp\vartheta\| \leqslant \frac{3}{(\log q_s)^{\varrho_1}}\cdot$$

Or, pour x_0 assez grand, on a $(\log q_s)^{\varrho_1} \geqslant \big\{w(x)(\log x)^{1-\varepsilon_0}\big\}^{\varrho_1} > 3(\log x)^{\varrho}$ puisque $(1-\varepsilon_0)\varrho_1 > \varrho$, donc

$$\|dp\vartheta\| \leqslant \eta = 1/(\log x)^{\varrho}.$$

Comme $dp \mid n_{k+r}$ dès que $r \geqslant 2\log w(x)+1 \geqslant \log_2(q_s^{3/2})-k$, cela établit bien (5·6).

Pour exploiter (5·6), il est nécessaire de disposer d'une minoration de F_k. Montrons à présent que

$$F_k \gg E_k + o(x). \tag{5·7}$$

Nous désignons, jusqu'à la fin de cette démonstration, par m^* un entier générique égal à un n_k pour au moins un entier n compté dans E_k^*.[5] Pour chaque m^* fixé, nous désignons de plus par la lettre b un entier générique soumis aux conditions

(i) $P^-(b) > r_k$,

(ii) $\exists p \mid b : \quad q_s^{4/3} < p \leqslant q_s^{3/2},\ p \in \mathcal{Z}_{m^*}\,(\mathrm{mod}\,q_s)$.

Notant $\Phi_s(x)$ le nombre des entiers n'excédant pas x et dont tous les facteurs premiers sont dans $]r_k, q_s^{4/3}] \cup]q_s^{3/2}, \infty[$. Nous pouvons écrire

$$F_k = \sum_{m^*} \sum_{b \leqslant x/m^*} 1 \geqslant \sum_{m^*} \sum_{\substack{q_s^{4/3} < p \leqslant q_s^{3/2} \\ p \in \mathcal{Z}_{m^*}\,(\mathrm{mod}\,q_s)}} \Phi_s\Big(\frac{x}{m^*p}\Big).$$

Le crible de Brun fournissant l'estimation

$$\Phi_s(x/m^*p) \asymp x/(m^*p\mathrm{e}^k) \qquad (m^* \leqslant q_s^{1/4},\, p \leqslant q_s^{3/2}),$$

nous obtenons donc

$$F_k \asymp \frac{x}{\mathrm{e}^k} \sum_{m^*} \frac{1}{m^*} \sum_{\substack{q_s^{4/3} < p \leqslant q_s^{3/2} \\ p \in \mathcal{Z}_{m^*}\,(\mathrm{mod}\,q_s)}} \frac{1}{p}\cdot \tag{5·8}$$

Nous avons maintenant

$$\sum_{\substack{q_s^{4/3} < p \leqslant q_s^{3/2} \\ p \notin \mathcal{Z}_{m^*}\,(\mathrm{mod}\,q_s)}} \frac{1}{p} = \sum_{a \notin \mathcal{Z}_{m^*}\,(\mathrm{mod}\,q_s)} \sum_{\substack{q_s^{4/3} < p \leqslant q_s^{3/2} \\ p \equiv a\,(\mathrm{mod}\,q_s)}} \frac{1}{p} \ll \frac{1}{(\log q_s)^{\varepsilon_1}}$$

5. Un entier m^* est donc caractérisé par les conditions
$$P^+(m^*) \leqslant r_k, \quad \min_{d \mid m^*} \|\vartheta d\| > \eta, \quad m^* \leqslant q_s^{1/4}, \quad Z_{\varrho_1, q_s}(m^*) \geqslant \{1 - 1/(\log q_s)^{\varepsilon_1}\}\varphi(q_s).$$

où la somme intérieure a été estimée par le théorème de Brun–Titchmarsh et la somme en a par la relation (5·5). Cela implique, pour x assez grand, que la somme en p de (5·8) est $\asymp 1$, d'où

$$F_k \asymp \frac{x}{\mathrm{e}^k}\sum_{m^*}\frac{1}{m^*}. \tag{5·9}$$

Par ailleurs, on a

$$E_k^* = \sum_{m^*}\Phi(x/m^*, r_k)$$

où, selon l'usage, nous avons noté $\Phi(x,y)$ le nombre des entiers n'excédant pas x dont tous les facteurs premiers sont $> y$. Une nouvelle application du crible de Brun fournit donc

$$E_k^* \asymp \frac{x}{\mathrm{e}^k}\sum_{m^*}\frac{1}{m^*}. \tag{5·10}$$

Nous déduisons de (5·9) et (5·10) que

$$F_k \asymp E_k^*.$$

Compte tenu de (5·4), cela établit bien (5·7).

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder la phase finale de notre démonstration de la relation (5·1). Nous raisonnons par l'absurde et supposons donc que $E_M \geqslant Ax$ où A est une constante positive. Nous avons alors

$$E_k \geqslant Ax \qquad (L < k \leqslant M).$$

Par (5·6) et (5·7), nous en déduisons l'existence d'une constante c, $0 < c < 1$, telle que

$$E_{k+r} \leqslant (1-c)E_k \qquad (r \geqslant R_x).$$

Par itération, il s'ensuit que

$$E_M \leqslant (1-c)^{(M-L)/R_x} x = o(x)$$

puisque nous avons par construction $M - L \asymp \log_2 x$ et $R_x = o(\log_2 x)$. Cela fournit bien la contradiction cherchée et achève ainsi notre démonstration.

Bibliographie

[1] de la Bretèche, R. & Tenenbaum, G., Séries trigonométriques à coefficients arithmétiques, *J. Anal. Math.* **92** (2004), 1–79.

[2] Davenport, H. On some infinite series involving arithmetical functions (II), *Quart. J. Math. Oxford,* **8** (1937), 313–320.

[3] Davenport, H., *Multiplicative number theory*, deuxième édition, Graduate Texts in Mathematics 74, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.
[4] Fouvry, E. & Tenenbaum, G., Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **63** (1991), 449—494.
[5] Halberstam, H. & Richert, H.-E., On a result of R.R. Hall, *J. Number Theory* **11**, n° 1 (1979), 76–89.
[6] Hall, R.R., On the distribution of divisors in residue classes $(\mathrm{mod}\, k)$, *J. Number Theory* **2**, n° 1 (1970), 168—188.
[7] Hall, R.R., The distribution of $f(d)\ (\mathrm{mod}\, 1)$, *Acta Arith.* **31** (1976), 91–97.
[8] Hall, R.R., Sets of multiples and Behrend sequences, in : *A tribute to Paul Erdős* (editors A. Baker, B. Bollobás, A. Hajnal), Cambridge University Press, 1990, 249–258.
[9] Hall, R.R. & Tenenbaum, G., *Divisors*, Cambridge tracts in mathematics, n° 90, Cambridge University Press (1988).
[10] Hall, R.R., *Sets of multiples*, Cambridge tracts in mathematics 118, Cambridge University Press, 1996.
[11] Khintchine, A. Ya., Zur metrischen Kettenbruch-theorie, *Compositio Math.* **3**, part 2 (1936), 275—285.
[12] Khintchine, A. Ya., *Continued fractions*, P. Noordhoff Ltd. Groningen, The Netherlands (1963).
[13] Mendès France, M. & Tenenbaum, G., Systèmes de points, diviseurs et structure fractale, *Bull. Soc. Math. France* **121** (1993), 197—225.
[14] Tenenbaum, G., *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, seconde éd., Cours spécialisés 1, Soc. Math. France (1995).
[15] Tenenbaum, G., On block Behrend sequences, *Math. Proc. Camb. Phil.. Soc.* **120** (1996), 355—367.
[16] Tenenbaum, G., Uniform distribution on divisors and Behrend sequences, *Enseign. Math.* **42** (1996), 355—367.
[17] Tenenbaum, G., en collaboration avec Wu, J., *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés 2, Soc. Math. France (1996).
[18] Tenenbaum, G., Crible d'Ératosthène et modèle de Kubilius, in : K. Győry, H. Iwaniec, J. Urbanowicz (éds.), *Number theory in progress*, Proceedings of the conference in honor of Andrzej Schinzel, Zakopane, Poland 1997, 1099–1129, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1999.
[19] Tenenbaum, G., Qu'est-ce qu'un entier normal ?, iin : É. Charpentier et al., éd., *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui, vol. 2,* 101–131, Éditions Cassini, coll. Le sel et le fer, 2003.

Sébastien Kerner & Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France